Euclidean Spaces

- The most important geometric properties that make $\mathbb{R}^n$ so use are
  1. The existence of a scalar product
  2. A norm induced by the scalar product

- In this chapter, we will extend the notions of scalar product and norm to other vector spaces different to $\mathbb{R}^n$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Scalar Products

Let V be a vector space with scalars in $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$).

A scalar product on V is a function

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) \mapsto \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$$

with the following properties: $\bar{v} \neq \bar{0}$

1. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \geq 0$; $\forall \ \vec{v} \in V$ ($\mathbb{R}$), $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \neq 0$ ($\mathbb{C}$)
2. $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ si y solo si $\vec{v} = \vec{0}$.
3. $\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$; $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$
4. $\langle \alpha \vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$; $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$.
5. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$; $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$

$\overline{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle} = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$ $\quad \mathbb{R} \quad \bar{a} = a$

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

- If $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, then $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ and $\forall \vec{u},\vec{v} \in V$
  - $\langle \vec{u},\vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v},\vec{u} \rangle} = \langle \vec{v},\vec{u} \rangle$
  - $\langle \vec{u},\alpha\vec{v} \rangle = \alpha \langle \vec{u},\vec{v} \rangle$

Corolary

1. $\forall \vec{u} \in V$, $\langle \vec{0},\vec{u} \rangle = \langle \vec{u},\vec{0} \rangle = 0$
2. $\langle \sum_i a_i \vec{u}_i , \sum_j b_j \vec{v}_i \rangle = \sum_{i,j} a_i \bar{b}_j \langle \vec{u}_i,\vec{v}_j \rangle$

   $\forall a_i, b_j \in \mathbb{F}$ y $\forall \vec{u}_i, \vec{v}_j \in V$.

$\overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b}$

- $\langle \bar{u},\alpha\bar{v} \rangle = \overline{\langle \alpha\bar{v},\bar{u} \rangle} = \overline{\alpha\langle \bar{v},\bar{u} \rangle}$

$$= \bar{\alpha}\,\overline{\langle \bar{v},\bar{u} \rangle}$$

$$\langle \bar{u},\alpha\bar{v} \rangle = \bar{\alpha} \langle \bar{u},\bar{v} \rangle$$

$\mathbb{F}=\mathbb{R}$: $\langle \bar{u},\alpha\bar{v} \rangle = \alpha \langle \bar{u},\bar{v} \rangle$

$\bar{a} = a$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

▸ $\langle \bar{u}, \bar{v}+\bar{w} \rangle = \overline{\langle \bar{v}+\bar{w}, \bar{u} \rangle} = \overline{\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{w}, \bar{u} \rangle}$

$= \overline{\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle} + \overline{\langle \bar{w}, \bar{u} \rangle}$

$\langle \bar{u}, \bar{v}+\bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$

▸ $\bar{v} - \bar{v} = \bar{0}$

$\langle \bar{0}, \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}-\bar{v}, \bar{u} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle - \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle = 0$

$\langle \bar{u}, \bar{0} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}-\bar{v} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$

▸ $\langle a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3, b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 \rangle$

$= \langle a_1\bar{u}_1, b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 \rangle + \langle a_2\bar{u}_2, b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 \rangle$

$+ \langle a_3\bar{u}_3, b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 \rangle$

$= a_1 \langle \bar{u}_1, b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 \rangle + a_2 \langle \bar{u}_2, b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 \rangle$

$+ a_3 \langle \bar{u}_3, b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 \rangle$

$= a_1 \left(\bar{b}_1 \langle \bar{u}_1, \bar{v}_1 \rangle + \bar{b}_2 \langle \bar{u}_1, \bar{v}_2 \rangle \right)$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \langle \bar{u}_1, \bar{v}_1 \rangle + \bar{b}_2 \langle \bar{u}_1, \bar{v}_2 \rangle \\ \bar{b}_1 \langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle + \bar{b}_2 \langle \bar{u}_2, \bar{v}_2 \rangle \\ \bar{b}_1 \langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle + \bar{b}_2 \langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \bar{u}_1, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{u}_1, \bar{v}_2 \rangle \\ \langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{u}_2, \bar{v}_2 \rangle \\ \langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle & \langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Uparrow$$

$$\langle a_1\bar{u}_1 + a_2\bar{u}_2 + a_3\bar{u}_3 ,\ b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 \rangle$$

	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$
$\bar{u}_1$	$\langle \bar{u}_1, \bar{v}_1 \rangle$	$\langle \bar{u}_1, \bar{v}_2 \rangle$
$\bar{u}_2$	$\langle \bar{u}_2, \bar{v}_1 \rangle$	$\langle \bar{u}_2, \bar{v}_2 \rangle$
$\bar{u}_3$	$\langle \bar{u}_3, \bar{v}_1 \rangle$	$\langle \bar{u}_3, \bar{v}_2 \rangle$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

- It is possible to define many scalar products in a given vector space

- In a vector space V with scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, it is possible to write the product $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ in matrix form.

Fix a basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}]_{\mathcal{B}}^t \, G_{\mathcal{B}} \, [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

where $G_{\mathcal{B}}$ is called the Gram matrix of $\langle \cdot, \cdot \rangle$ with respect to $\mathcal{B}$, given by

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \vec{b}_n, \vec{b}_1 \rangle & \langle \vec{b}_n, \vec{b}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{b}_n, \vec{b}_n \rangle \end{vmatrix}$$

- Observe that $G_{\mathcal{B}} = \overline{G_{\mathcal{B}}}^t$.
- When V is a real vector space, $G_{\mathcal{B}} = G_{\mathcal{B}}^t$.

Example. Consider the usual scalar product on $\mathbb{R}^3$ defined by

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 .$$

and the basis

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \end{pmatrix} \right\} = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Compute the Gram matrix of $\langle\cdot,\cdot\rangle$ with respect to $\mathcal{B}$.

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \underbrace{(x_1\ x_2\ x_3)}_{= [\bar{x}]_\mathcal{E}} \overset{I_3}{} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{= [\bar{y}]_\mathcal{E}}$$

$$G_\mathcal{E} = I_3$$

$$G_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \langle \bar{b}_1, \bar{b}_1 \rangle & \langle \bar{b}_1, \bar{b}_2 \rangle & \langle \bar{b}_1, \bar{b}_3 \rangle \\ \langle \bar{b}_2, \bar{b}_1 \rangle & \langle \bar{b}_2, \bar{b}_2 \rangle & \langle \bar{b}_2, \bar{b}_3 \rangle \\ \langle \bar{b}_3, \bar{b}_1 \rangle & \langle \bar{b}_3, \bar{b}_2 \rangle & \langle \bar{b}_3, \bar{b}_3 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$G_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \bar{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[\bar{u}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\bar{u}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [\bar{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [\bar{v}]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = [\bar{u}]_{\mathcal{E}}^t \underbrace{G_{\mathcal{E}}}_{= I_3} [\bar{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 8$$

$$= [\bar{u}]_B^t G_B [\bar{v}]_B$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \end{pmatrix} = 8$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example. Consider the following scalar product defined on $\mathbb{P}_2$

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx, \quad \forall p(x), q(x) \in \mathbb{P}_2.$$

Compute the Gram matrix with respect to $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ and use it to compute

$$\int_0^1 (x-1)^2 \cdot 2(x-1)\,dx$$

$$\langle 1,1\rangle = \int_0^1 1\,dx = 1 \qquad \langle 1, x\rangle = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$$

$\langle 1, x^2\rangle = \int^1 x^2 dx = 1$ $\quad \langle x, x\rangle = \int^1 x^2 dx = 1$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70
- - -
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\langle x, x^2 \rangle = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4} \qquad \langle x^2, x^2 \rangle = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

$$\langle x, 1 \rangle = \langle 1, x \rangle$$

$$G_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$$

$$\int_0^1 p(x) q(x)\, dx = [p]_\varepsilon^t \, G_\varepsilon \, [q]_\varepsilon \qquad p, q \in \mathbb{P}_2$$

$$\int_0^1 (x-1)^2 \cdot 2(x-1)\, dx = [(x-1)^2]_\varepsilon^t \, G_\varepsilon \, [2(x-1)]_\varepsilon$$

$$[(x-1)^2]_\varepsilon = [1 - 2x + x^2]_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\int_0^1 (x-1)^2 \cdot 2(x-1)\, dx =$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

$$\frac{10-15+6}{30}$$

$$-\frac{1}{30}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/12 & 1/30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2/3 + 1/6 = \frac{-4+1}{6} = -1/2$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Scalar products and change of basis

- Any scalar product defined on a vector space is independent of the basis chosen to represent the vectors.

Let $\mathcal{B}$ and C be two bases of the vector space V, and let $\underset{C\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ be the change of basis matrix from $\mathcal{B}$ to C.

$$[\vec{x}]_C = \underset{C\leftarrow\mathcal{B}}{P}\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}}, \quad \forall \vec{x} \in V.$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

We will study the relationship between the Gram matrices with respect to two distinct bases.

For every $\vec{u}, \vec{v} \in V$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = [\vec{u}]_C^t \, G_C \, [\vec{v}]_C$$

$$= \left(\underset{C \leftarrow B}{P} [\vec{u}]_B \right)^t G_C \left(\underset{C \leftarrow B}{P} [\vec{v}]_B \right)$$

$(AB)^t = B^t A^t$

$$= [\vec{u}]_B^t \, \underset{C \leftarrow B}{P}^t \, G_C \, \underset{C \leftarrow B}{P} \, [\vec{v}]_B$$

$$= [\vec{u}]_B^t \, G_B \, [\vec{v}]_B$$

Therefore: $\quad G_B = \underset{C \leftarrow B}{P}^t \, G_C \, \underset{C \leftarrow B}{P}$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example. Consider the usual scalar product in $\mathbb{R}^3$. Let

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

two bases of $\mathbb{R}^3$. Verify the relation between $G_{\mathcal{B}}$ and $G_{\mathcal{E}} = I_3$

$$G_B = P^t_{\mathcal{E}\leftarrow B}\, G_{\mathcal{E}}\, P_{\mathcal{E}\leftarrow B} \longrightarrow G_{\mathcal{E}} = P^t_{B\leftarrow \mathcal{E}}\, G_B\, P_{B\leftarrow \mathcal{E}}$$

$$P^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow B} \qquad P^{-1}_{\mathcal{E}\leftarrow B}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow B}{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad G_{\mathcal{E}} = I_3$$

$$\underset{\mathcal{E}\leftarrow B}{P^t} \; G_{\mathcal{E}} \; \underset{\mathcal{E}\leftarrow B}{P}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \overset{G_B}{\overset{\parallel}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example. Let U_{w_0} be the subspace of periodic functions with period $T_0 = 2\pi/w_0$ spanned by $\quad j=\sqrt{-1}$

$$B = \{1, \cos w_0 t, \cos 2w_0 t, j\sin w_0 t, j\sin 2w_0 t\}.$$

That is, we are talking about the space of fonctions of the form

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos w_0 t + a_2 \cos 2w_0 t + b_1 j\sin w_0 t + b_2 j \sin 2w_0 t.$$

Another basis for this space is

$$C = \{e^{-j2w_0 t}, e^{-jw_0 t}, 1, e^{jw_0 t}, e^{j2w_0 t}\}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

These two bases are related by

$$\cos n\omega_0 t = \tfrac{1}{2} e^{jn\omega_0 t} + \tfrac{1}{2} e^{-jn\omega_0 t} \qquad n=1,2$$

$$j\sin n\omega_0 t = \frac{1}{2} e^{jn\omega_0 t} - \frac{1}{2} e^{-jn\omega_0 t} \qquad n=1,2$$

Consider the scalar product

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_{T_0} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

(the scalars are complex numbers).

$T_0 = 2\pi$

$\omega_0 = 1$

$$\langle f(t), g(t)\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

The respective Gram matrices are

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} T_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_0/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_0/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_0/2 \end{pmatrix}$$

$$G_C = \begin{pmatrix} T_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_0 \end{pmatrix} = T_0 I_5$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

The change of basis matrix $\underset{C \leftarrow B}{P}$ is

$$\underset{C \leftarrow B}{P} = \begin{array}{c} [1]_C \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\cos w_0 t = \frac{1}{2} e^{-jw_0 t} + \frac{1}{2} e^{jw_0 t}$.

It can be easily verified that

$$G_B = \underset{C \leftarrow B}{P^t} \, G_c \, \underset{C \leftarrow B}{P} = T_0 \underset{C \leftarrow B}{P^t} \, \underset{C \leftarrow B}{P}$$

Linear systems

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Norm of a vector

$x \in \mathbb{R}$ $\quad |x|$

$\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ $\quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Definition

Let V be a vector space and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be a scalar product in V. The norm of a vector $\bar{u} \in V$ is defined by

induced by $\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\|\bar{u}\| = \sqrt{\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle}.$$

$|z| = x + iy$

- Observe that the norm is well-defined since $\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle \geq 0$ for all $\bar{u} \in V$.

- The norm depends on the scalar product.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Properties of the norm

1. $\|\vec{u}\| \geq 0.$ $\qquad \sqrt{\underbrace{\langle \bar{u}, \bar{u} \rangle}_{\geq 0}}$
2. $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$ $\qquad |\alpha| > 1$
3. $\|\alpha \vec{u}\| = |\alpha| \, \|\vec{u}\|$ $\qquad |\alpha| < 1$

- A vector $\bar{u} \in V$ with $\|\bar{u}\| = 1$ is called a unit vector.
- For any vector $\bar{v} \neq \bar{0}$, a unit vector can be easily constructed

$$\frac{\pm \bar{v}}{\|\bar{v}\|} \qquad \left\langle \frac{\pm \bar{v}}{\|\bar{v}\|}, \frac{\pm \bar{v}}{\|\bar{v}\|} \right\rangle = \frac{(\pm 1)^2}{\cancel{\|\bar{v}\|^2}} \underbrace{\cancel{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}}_{\|\bar{v}\|^2} = 1$$

Triangle inequality

For every $\bar{x}, \bar{y} \in V$:

Cartagena99

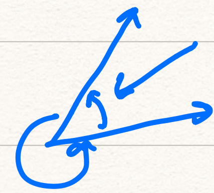
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Angle between vectors



Schwarz Inequality

Let V be a vector space with scalar product $\langle \cdot,\cdot \rangle$. For every $\bar{x},\bar{y} \in V$:

$$-\|\bar{x}\|\|\bar{y}\| \le \langle \bar{x},\bar{y}\rangle \le \|\bar{x}\|\|\bar{y}\|$$

$$|\langle \bar{x},\bar{y}\rangle| \le \|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\| \Leftrightarrow -1 \le \frac{\langle \bar{x},\bar{y}\rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|} \le 1$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \bar{x},\bar{y}\rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|} \rightarrow \theta = \arccos \frac{\langle \bar{x},\bar{y}\rangle}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|}$$

Definition

The angle between two vectors $\bar{x}$ and $\bar{y}$ is the unique number $0 \le \alpha \le \pi$ such that

$$\cos\alpha = \langle \bar{x},\bar{y} \rangle$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

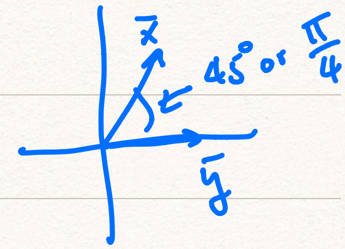
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example Consider the two vectors

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



- Consider the usual scalar product

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^t \, \vec{y}$$

Compute the angle between $\bar{x}$ and $\bar{y}$.

$$\cos\alpha = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

- Consider the scalar product

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^t \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

$$\sqrt{\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow = 3x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Compute the angle between $\bar{x}$ and $\bar{y}$.

Cartagena99

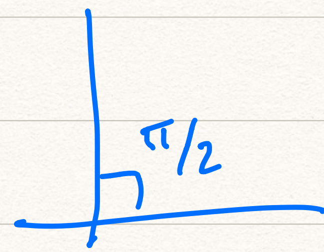
CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

- Two vectors $\bar{x}$ and $\bar{y}$ are orthogonal if $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0$, equivalently, if the angle between $\bar{x}$ and $\bar{y}$ is $\pi/2$.



Before x-mass break

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Orthogonal and orthonormal bases.

Definition

Let V be a vector space with scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and let $\mathcal{B} = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ be a basis of V.
$\mathcal{B}$ is an orthogonal basis if $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = 0$ when $i \neq j$.
If additionally $\|\bar{e}_i\| = 1$ for all i, the $\mathcal{B}$ is an orthonormal basis.

- This definition can be extended to infinite dimensional vector spaces.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example. Both

$$\mathcal{B} = \{\cos n\omega_0 t\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin n\omega_0\}_{n=1}^{\infty}$$

and

$$C = \{e^{jn\omega_0 t}\}_{n=-\infty}^{\infty}$$

are orthogonal bases of the space of periodic functions with scalar product

$$\langle f, g \rangle = \int_T f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

and period $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

$m \neq n$

$$\int_0^T e^{jn\omega_0 t}\,\overline{e^{jm\omega_0 t}}\,dt = \int_0^T e^{j(n-m)\omega_0 t}\,dt$$

$$= \frac{1}{} e^{j(n-m)\omega_0 t}\Big|^{T} = \frac{\overbrace{e^{j(n-m)\omega_0 T}}^{=1} - 1}{} = 0$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \; . \rightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$j(n-m)\omega_0 T = j(n-m)\frac{2\pi}{T} \cdot T = j2\pi(m-n)$$

$$e^{j2\pi(n-m)} = \underbrace{\cos(2\pi(n-m))}_{1} + j\underbrace{\sin(2\pi(n-m))}_{0}$$

$$= 1 + j0$$

$$= 1$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example. The set of polynomials

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, x, \tfrac{1}{2}(3x^2-1), \tfrac{1}{2}(5x^3-3x) \right\}$$

is an orthogonal basis of $\mathbb{P}_3$, with scalar product

$$\langle p,q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx.$$

$$\langle 1, x \rangle = \int_{-1}^{1} x\, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(-1)^2 = 0$$

$$\langle x, \tfrac{1}{2}(3x^2-1) \rangle = \int_{-1}^{1} \tfrac{1}{2}(3x^3 - x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3x^4}{4} - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}\left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right\} - \frac{1}{2}\left\{ \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \right\} = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example. The matrices $\qquad j=\sqrt{-1}$

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -j \\ j & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \overline{\sigma_y^t}$$

form an orthogonal basis of the vector space of hermitian matrices $(A=\overline{A^t})$ of size 2x2 with scalar product defined by

$$\langle A,B\rangle = \underbrace{\mathrm{Trace}}_{\text{sum of the elements}}(\overline{A}^t B).$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\langle \sigma_0, \sigma_x \rangle = \text{Trace}\left(\bar{\sigma}_0^t \sigma_x\right) = \text{Trace}\left(\sigma_0 \sigma_x\right) = 0$$

$$A = \bar{A}^t$$

$$\sigma_0 \sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\| \sigma_0 \| = \sqrt{\langle \sigma_0, \sigma_0 \rangle} = \sqrt{\text{Trace}\left(\sigma_0^2\right)} = 1$$

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Orthonormal basis.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Exercise. Let V be a finite dimensional vector space with scalar product $\langle \cdot , \cdot \rangle$ and let $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ be a basis.

Show the following:

1. The basis $\mathcal{B}$ is orthogonal if and only if the Gram matrix w.r.t. B is diagonal.
2. The basis $\mathcal{B}$ is orthonormal if and only if the Gram matrix is the identity matrix.

$$G_B = \begin{pmatrix} \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle & \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle & \langle \bar{e}_1, \bar{e}_3 \rangle \cdots \\ \langle \bar{e}_2, \bar{e}_1 \rangle & \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle & \langle \bar{e}_2, \bar{e}_3 \rangle \cdots \\ \langle \bar{e}_3, \bar{e}_1 \rangle & \langle \bar{e}_3, \bar{e}_2 \rangle & \langle \bar{e}_3, \bar{e}_3 \rangle \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

If B is orthogonal, $\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle = 0 \quad i \neq j$

$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle = \|\bar{e}_i\|^2 = 1$

Theorem

Let V be an n-dimensional vector space. The change of basis matrix between two orthonormal bases B and C satisfies

$$\underset{C\leftarrow B}{P}^t = \underset{C\leftarrow B}{P}^{-1} = \underset{B\leftarrow C}{P}$$

If B and C are orthonormal then $G_B = G_C = I$

$$\underbrace{G_C}_{I} = P^t \underbrace{G_B}_{I} P \Rightarrow I = P^t \underbrace{P}_{= \underset{B\leftarrow C}{P}^{-1}}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$P P^t = I$$

$$P = \left(\bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \cdots \quad \bar{p}_n \right)$$

$$P^t = \begin{pmatrix} \bar{p}_1^t \\ \bar{p}_2^t \\ \vdots \\ \bar{p}_n^t \end{pmatrix}$$

$$P^t P = \begin{pmatrix} \bar{p}_1^t \bar{p}_1 & \bar{p}_1^t \bar{p}_2 & \cdots & \bar{p}_1 \bar{p}_n \\ \bar{p}_2^t \bar{p}_1 & \bar{p}_2^t \bar{p}_2 & \cdots & \bar{p}_2^t \bar{p}_n \\ \vdots & & & \\ \bar{p}_n^t \bar{p}_1 & \cdots & \cdots & \bar{p}_n^t \bar{p}_n \end{pmatrix} = I$$

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \bar{x}^t \bar{y}$$

I

$$\bar{p}_i^t \bar{p}_i = 1 \qquad \bar{p}_i^t \bar{p}_j = 0 \qquad i \neq j$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Theorem

Let V be a vector space with scalar product $\langle \cdot , \cdot \rangle$, and $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ is an orthogonal basis. Then, for every vector $\vec{x} \in V$

$$\vec{x} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \frac{\langle \vec{x}, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{\langle \vec{x}, \vec{u}_n \rangle}{\|\vec{u}_n\|^2} \vec{u}_n.$$

- The representation in the previous theorem is called a Fourier Series.

$$\bar{x} = c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 + \dots + c_j \bar{u}_j + \dots + c_n \bar{u}_n$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\langle \bar{x}, \bar{u}_j \rangle = \langle c_1 \bar{u}_1 + c_2 \bar{u}_2 + \cdots + c_j \bar{u}_j + \cdots + c_n \bar{u}_n, \bar{u}_j \rangle$$

$$= c_1 \underbrace{\cancel{\langle \bar{u}_1, \bar{u}_j \rangle}}_{0} + c_2 \underbrace{\cancel{\langle \bar{u}_2, \bar{u}_j \rangle}}_{0} + \underbrace{\cancel{\cdots}}_{0} + \boxed{c_j \langle \bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle}$$

$$+ \underbrace{\cancel{\cdots}}_{0} + c_n \underbrace{\cancel{\langle \bar{u}_n, \bar{u}_j \rangle}}_{0}$$

$$\langle \bar{x}, \bar{u}_j \rangle = c_j \|\bar{u}_j\|^2 \qquad c_j = \frac{\langle \bar{x}, \bar{u}_j \rangle}{\|\bar{u}_j\|^2} \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\|\bar{u}_j\|^2 = 1 \rightarrow c_j = \langle \bar{x}, \bar{u}_j \rangle \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Example. Consider the <u>usual scalar product</u> in $\mathbb{R}^3$, the orthogonal basis and the vector

$$B = \left\{ \underset{\bar{b}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{b}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{\bar{b}_3}{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\bar{x} = \underbrace{\frac{\langle \bar{x}, \bar{b}_1 \rangle}{\|\bar{b}_1\|^2}}_{4/3} \bar{b}_1 + \underbrace{\frac{\langle \bar{x}, \bar{b}_2 \rangle}{\|\bar{b}_2\|^2}}_{-1/2} \bar{b}_2 + \underbrace{\frac{\langle \bar{x}, \bar{b}_3 \rangle}{\|\bar{b}_3\|^2}}_{1/3} \bar{b}_3$$

$$\langle \bar{x}, \bar{b}_1 \rangle = \bar{x}^t \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$\|\bar{b}_1\|^2 = \langle \bar{b}_1, \bar{b}_1 \rangle = \bar{b}_1^t \bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\langle \bar{x}, \bar{b}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\|\bar{b}_2\|^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \ \end{pmatrix} = 2$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\langle \bar{x}, \bar{b}_3 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/2 + 1 - 1 = 1/2$$

$$\|\bar{b}_3\|^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1/4 + 1/4 + 1 = 3/2$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Exercise. Show that a set of non-zero orthogonal vectors is linearly independent.

$B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_r\}$ orthogonal

if $r = \dim V$, B is a basis.

$$c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + \dots + c_n\bar{u}_n = \bar{0} \iff \underbrace{c_1 = c_2 = \dots c_n = 0}$$

$$0 = \langle \bar{0}, \bar{u}_j \rangle = \langle c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + \dots + c_n\bar{u}_n, \bar{u}_j \rangle$$

$$0 = c_j \underbrace{\langle \bar{u}_j, \bar{u}_j \rangle}_{\neq 0} \Rightarrow c_j = 0$$

orthogonality $+$ $\#B = \dim V \Rightarrow B$ is a basis

$\Updownarrow$

lin. ind.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Gram-Schmidt orthogonalization method.

Let V be an n-dimensional vector space and let $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ be a basis of V. Then $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ is an orthogonal basis, where

$$\vec{e}_1 = \vec{u}_1$$

$$\vec{e}_2 = \vec{u}_2 - \frac{\langle \vec{u}_2, \vec{e}_1 \rangle}{\|\vec{e}_1\|^2} \vec{e}_1$$

$$\vdots$$

$$\vec{e}_i = \vec{u}_i - \lambda_{i,1} \vec{e}_1 - \cdots - \lambda_{i,i-1} \vec{e}_{i-1}, \quad \lambda_{i,j} = \frac{\langle \vec{u}_i, \vec{e}_j \rangle}{\|\vec{e}_j\|^2}$$

$$\vdots$$

$$\vec{e}_n = \vec{u}_n - \langle \vec{u}_n, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 - \cdots - \langle \vec{u}_n, \vec{e}_{n-1} \rangle \vec{e}_{n-1}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example. Let $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Consider the usual scalar product in $\mathbb{R}^3$ and the basis $\mathcal{B} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$. Use Gram-Schmidt method to find an orthogonal and orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$.

$\|\bar{e}_i\|^2 = 1$

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \bar{x}^t \bar{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

$\bar{v} \neq \bar{0}$, $\dfrac{\bar{v}}{\|\bar{v}\|}$ is a unit vector.

$\bar{e}_1 = \bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|\bar{e}_1\|^2 = \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\bar{e}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\langle \cancel{\bar{u}_2, \bar{e}_1} \rangle^{0}}{\|\bar{e}_1\|^2}\bar{e}_1 = \bar{u}_2 \qquad \|\bar{e}_2\|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 0^2 = 2$$

$$\langle \bar{u}_2, \bar{e}_1 \rangle = (1 \ \ -1 \ \ 0)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\bar{e}_3 = \bar{u}_3 - \frac{\langle \cancel{\bar{u}_3, \bar{e}_1} \rangle^{0}}{\|\bar{e}_1\|^2}\bar{e}_1 - \frac{\langle \bar{u}_3, \bar{e}_2 \rangle}{\|\bar{e}_2\|^2}\bar{e}_2 = \bar{u}_3 - \frac{1}{2}\bar{e}_2 = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\langle \bar{u}_3, \bar{e}_1 \rangle = (1 \ \ 0 \ \ -1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 0$$

$$\langle \bar{u}_3, \bar{e}_2 \rangle = (1 \ \ 0 \ \ -1)\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 1$$

Orthogonal Basis: $\left\{ \bar{e}_1 = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}, \bar{e}_2 = \begin{pmatrix}1\end{pmatrix}, \bar{e}_3 = \begin{pmatrix}1/2\end{pmatrix} \right\}$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\|\bar{e}_3\|^2 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + 1 = \tfrac{3}{2}$$

Orthonormal basis:

$$\left\{ \frac{\bar{e}_1}{\|\bar{e}_1\|}, \frac{\bar{e}_2}{\|\bar{e}_2\|}, \frac{\bar{e}_3}{\|\bar{e}_3\|} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -\sqrt{2/3} \end{pmatrix} \right\}$$

Orthogonal Complement

- Given a vector $\bar{x} \in V$ and a subspace $U \subseteq V$, we say that $\bar{x}$ is orthogonal to U, denoted by $\bar{x} \perp U$, if $\bar{x}$ is orthogonal to every vector in U. That is

$$\bar{x} \perp U \iff \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = 0, \ \forall \bar{y} \in U.$$

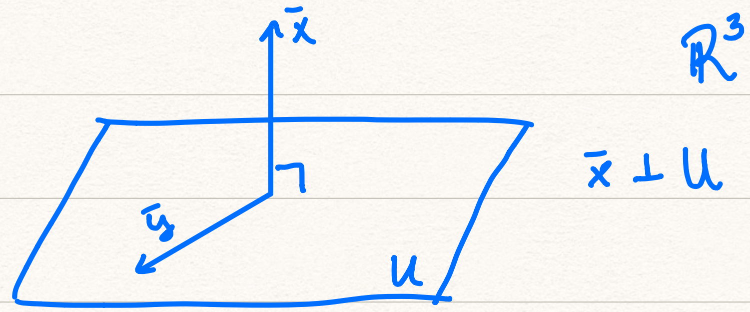
Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.



Theorem

Let V be a vector space with scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, and let U be a subspace of V. Then, the set

$$U^{\perp} = \{\vec{x} \in V, \ \vec{x} \perp U\}$$

called the orthogonal complement of U, is a subspace of V. Moreover, every vector $\bar{v} \in V$ can be written uniquely as $\bar{v} = \bar{x} + \bar{y}$ wher $\bar{x} \in U$ and $\bar{y} \in U^{\perp}$.

In particular,

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

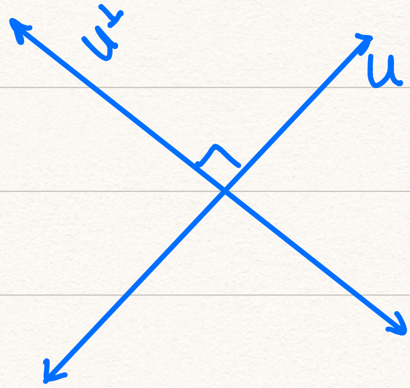
- - -

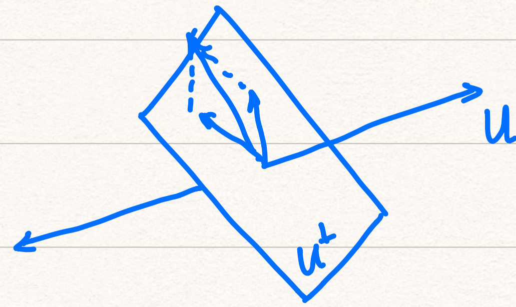
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$\mathbb{R}^2$, usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$

$\mathbb{R}^3$, usual $\langle \cdot , \cdot \rangle$

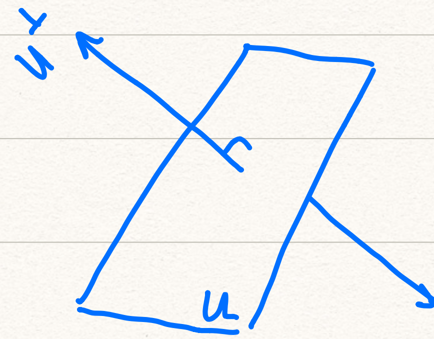




$(U^\perp)^\perp = U$

$$(\mathbb{R}^2)^\perp = \{\bar{0}\}$$

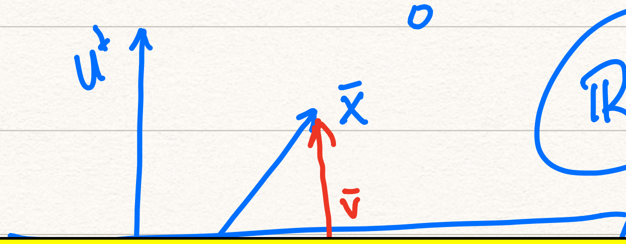
$$\langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = 0$$



$U^\perp$ is a vector subspace

$\bar{x}, \bar{y} \in U^\perp \qquad \langle \bar{x}, \bar{u} \rangle = \langle \bar{y}, \bar{u} \rangle = 0 \quad \forall\, \bar{u} \in U.$

$$\langle \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}, \bar{u} \rangle = \alpha \underbrace{\langle \bar{x}, \bar{u} \rangle}_{0} + \beta \underbrace{\langle \bar{y}, \bar{u} \rangle}_{0} = 0$$



$\mathbb{R}^3$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$\downarrow$

Example. Consider the subspace of $\mathbb{R}^3$

$$U = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ (usual scalar product)

Compute $U^\perp$.

$\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U^\perp$, $\quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \bar{x} \right\rangle = 0$

$$\underbrace{\overset{1\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \qquad U^\perp = \text{Nul}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$U^{\perp} = \text{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al
Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example. In $\mathbb{R}^3$, consider the scalar product with Gram matrix with respect to the canonical basis

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Consider the subspace

$$U = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Find $U^\perp$.

G=I (previous example)

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \bar{x}^t G \bar{y}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

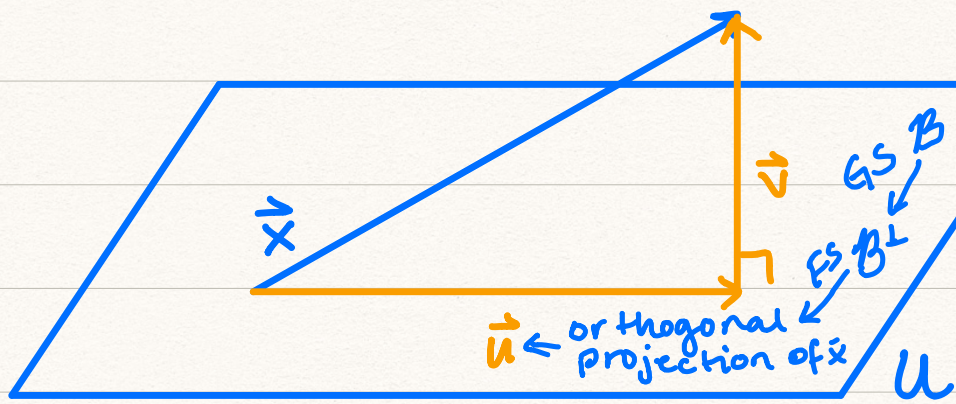
- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Orthogonal Projection

Every vector $\bar{x} \in V$ has a unique representation as $\bar{x} = \bar{u} + \bar{v}$ where $u \in U$ and $v \in U^{\perp}$.



- The vector $\bar{u} \in U$ is called the orthogonal projection of $\bar{x}$ over U and is denoted by $\hat{x}$.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002. Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Theorem

Let V be a vector space with scalar product $\langle \cdot , \cdot \rangle$, U is a subspace, and $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ an orthogonal basis of U.

Then, for every vector $\vec{x} \in V$,

$$\hat{x} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1\|^2} \vec{u}_1 + \frac{\langle \vec{x}, \vec{u}_2 \rangle}{\|\vec{u}_2\|^2} \vec{u}_2 + \cdots + \frac{\langle \vec{x}, \vec{u}_r \rangle}{\|\vec{u}_r\|^2} \vec{u}_r .$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Example. Let

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Let U be the subspace spanned by $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$. ~~Compute the projection operators over U and $U^\perp$ with the usual scalar product.~~

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Compute the orthogonal projection of $\bar{x}$ onto U with respect to the usual scalar product.

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

need to apply Gram-Schmidt?

$$\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -3+2+1 = 0$$

Already orthogonal.

$$\hat{x} = \frac{\langle \bar{x}, \bar{u}_1 \rangle}{\|\bar{u}_1\|^2} \bar{u}_1 + \frac{\langle \bar{x}, \bar{u}_2 \rangle}{\|\bar{u}_2\|^2} \bar{u}_2$$

$$\hat{x} = \underbrace{\frac{\langle \bar{x}, \bar{u}_1 \rangle}{\|\bar{u}_1\|^2}}_{1} \bar{u}_1 + \underbrace{\frac{\langle \bar{x}, \bar{u}_2 \rangle}{\|\bar{u}_2\|^2}}_{1} \bar{u}_2 = \underbrace{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}_{\text{component of } \bar{x} \text{ in } U}$$

$$\langle \bar{x}, \bar{u}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \end{pmatrix} = 3-1+9 = 11$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

$$\|\bar{u}_1\|^2 = \langle \bar{u}_1, \bar{u}_1 \rangle = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 11$$

$$\langle \bar{x}, \bar{u}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1-2+9 = 6$$

$$\|\bar{u}_2\|^2 = \langle \bar{u}_2, \bar{u}_2 \rangle = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 6$$

$$\bar{x} = \underbrace{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}_{\hat{x}} + \underset{\in U^\perp}{u_3}$$

$$\bar{x} = \hat{x} + \bar{v}$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

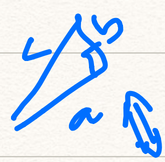
www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

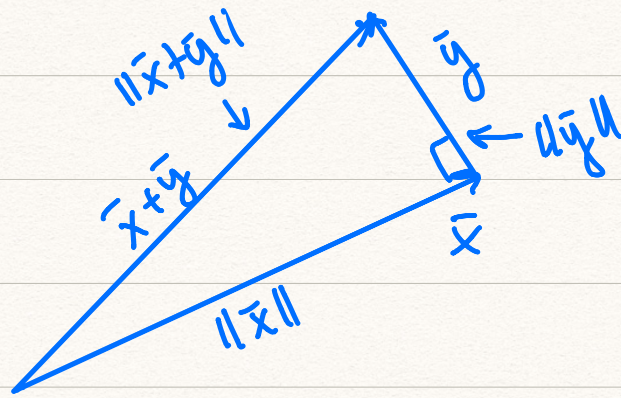
Theorem Pythagoras!!

Let V be a vector space with scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$, and let $\bar{x}, \bar{y} \in V$, then $\bar{x} \perp \bar{y}$ if and only if

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

$\mathbb{R}^2$, with the usual scalar product





$a^2+b^2=c^2$

$$\bar{x} \perp \bar{y} \Leftrightarrow \|\bar{x}+\bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

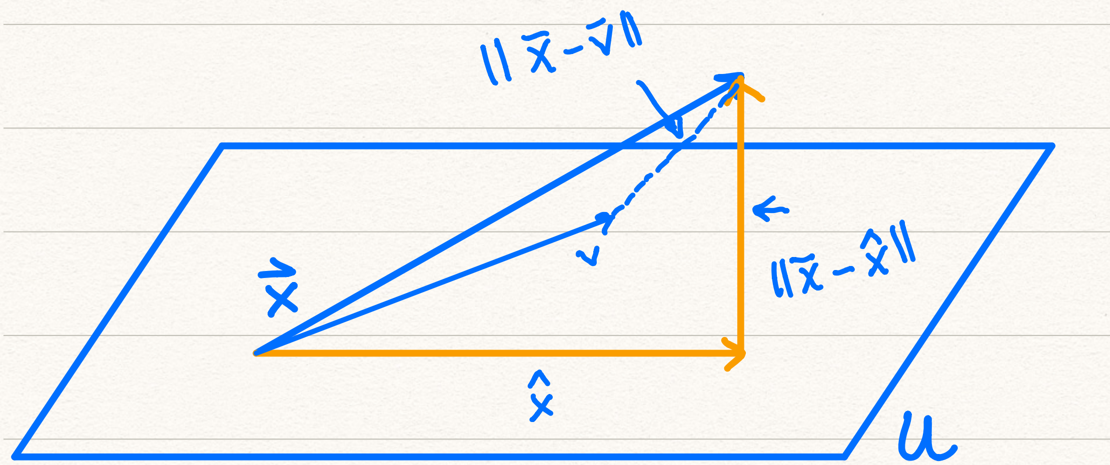
ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.

Theorem

Let V be a vector space with scalar product $\langle \cdot , \cdot \rangle$ and let U be a subspace of V. For every $\bar{x} \in V$, $\hat{x} \in U$ is the unique vector such that

$\forall \bar{v} \in U, \ \bar{v} \neq \hat{x}, \ \|\bar{x} - \hat{x}\| < \|\bar{x} - \bar{v}\|$



$$\|\bar{x} - \hat{x}\| < \|\bar{x} - \bar{v}\| \qquad \forall \bar{v} \in U$$

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

- - -

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

www.cartagena99.com no se hace responsable de la información contenida en el presente documento en virtud al Artículo 17.1 de la Ley de Servicios de la Sociedad de la Información y de Comercio Electrónico, de 11 de julio de 2002.
Si la información contenida en el documento es ilícita o lesiona bienes o derechos de un tercero háganoslo saber y será retirada.